2 КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1 Основные законы и формулы

2.1.1 Средняя скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

2.1.2 Средняя путевая скорость

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

2.1.3 Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \upsilon = \frac{ds}{dt}$$

2.1.4 Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}; \quad a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

2.1.5 Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2}$$

где $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ – нормальное ускорение, $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ – тангенциальное ускорение.

2.1.6 Для прямолинейного равномерного движения

$$\upsilon = \frac{s}{t} = const; \quad a = 0$$

2.1.7 Для прямолинейного равнопеременного движения

$$s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \quad \upsilon = \upsilon_0 \pm at; \quad a = \text{const}$$

2.1.8 Угловая скорость при вращательном движении

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

2.1.9 Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

2.1.10 Соотношение между линейной и угловой скоростями

$$\upsilon = \omega R$$

2.1.11 Соотношение между угловым, тангенциальным и нормальным ускорениями

$$a_\tau = \varepsilon R, \qquad a_n = \omega^2 R$$

2.1.12 В случае равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n, \qquad \varphi = 2\pi N$$

где T- период, n- частота вращения, N –число оборотов

2.1.13 Для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

2.2 Примеры решения задач

2.2.1 Задача 1. Движение материальной точки, перемещающейся по прямой задано уравнением $S = 4t^3 + 2t + 1$ (1). Найти в интервале времени, начиная от 1с до 2с: мгновенные скорости в начале и в конце интервала; среднюю скорость движения; мгновенное ускорение в начале и в конце заданного интервала времени.

Решение.

Находим мгновенную скорость, как производную от пути по времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}; \quad (2) \qquad \upsilon = 12t^2 + 2 \quad (3)$$

Для вычисления средней скорости движения надо найти отношение пути ко времени, в течение которого он пройден: $<\upsilon> = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (4)

По формуле (3) вычисляем скорости в начале и в конце интервала времени $(t_0 = 1c; t = 2c)$; $\upsilon_0 = 12 \cdot 1^2 + 2 = 14$ м /с; $\upsilon = 12 \cdot 2 + 2 = 50$ м /с.

Для определения средней скорости находим путь, проходимый за время от $t_0 = 1c$ до $t = 2c$, используя уравнение (1). Этот путь равен: $S = 4(t^3 - t_0^3) + 2(t - t_0) = 4(2^3 - 1^3) + 2(2 - 1) = 30$ м. По формуле (4) вычисляем

$$<\upsilon> = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{30}{1} = 30 \text{ м /с.}$$

Мгновенное ускорение определяется первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}; \quad (5) \qquad a = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (6)$$

Используя (3), находим $a = 24t$. В начале и в конце заданного интервала времени ускорение равно: $a_0 = 24$ м/с^2 ; $a = 24 \cdot 2 = 48$ м/с^2

Ответ: $\upsilon_0 = 14$ м /с; $\upsilon = 50$ м /с; $<\upsilon>$=30 м /с; $a_0 = 24$ м/с^2; $a = 48$ м/с^2.

2.2.2 Задача 2. По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям $x_1=A_1+B_1t+C_1t^2$; $x_2=A_2+B_2t+C_2t^2$, где A_1=10м; B_1=1м/с; C_1=1,2м/с^2; A_2=3м; B_2=2м/с; C_2=0,2м/с^2. В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковы? Найти ускорения a_1 и a_2 этих точек в момент t=3с.

Решение.

Дано	
A_1=10м B_1=1м/с C_1=1,2м/с^2 A_2=3м B_2=2м/с C_2=0,2м/с^2	Мгновенная скорость равна первой производной от координаты по времени: $\upsilon_1=B_1+2C_1t$; $\upsilon_2=B_2+2C_2t$. По условию задачи $\upsilon_1=\upsilon_2$; $B_1+2C_1t=B_2+2C_2t$, откуда $2t\,(C_1-C_2)=B_2-B_1$; $t=\dfrac{B_2-B_1}{2(C_1-C_2)}$. Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени: $a_1=2C_1$, $a_2=2C_2$.
t-? a_1-? a_2-?	

Вычисления: $t=\dfrac{2-1}{2(1{,}2-0{,}2)}=0{,}5$ с

$a_1=2\cdot1{,}2=2{,}4$м/с^2; $a_2=2\cdot0{,}2=0{,}4$м/с^2.

Ускорения a_1 и a_2 не зависят от времени и в любой момент времени a_1=2,4м/с^2, a_2=0,4м/с^2.

Ответ: t =0,5с; a_1=2,4м/с^2, a_2=0,4м/с^2.

2.2.3 Задача 3. Тело падает с высоты 49м. Определить перемещение тела в последнюю секунду падения.

Решение.

Дано	
h=49м Δt=1с	Уравнение движения тела при свободном падении без начальной скорости $h=\dfrac{gt^2}{2}$ (1)
Δh-?	

За время $(t-\Delta t)$ тело пройдет путь $h_1=\dfrac{g(t-\Delta t)^2}{2}$ (2)

Тогда $\Delta h=h-h_1=\dfrac{g(t^2-(t-\Delta t)^2)}{2}=\dfrac{g(2t-\Delta t)\Delta t}{2}$ (3)

Время падения t тела с высоты h найдем из уравнения (1): $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ и подставим в уравнение (3): $\Delta h=\dfrac{g}{2}\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2h}{g}}-\Delta t\right)\Delta t$

Анализ единиц: $[h]=\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\left(\sqrt{\dfrac{\text{м}}{\text{м}/\text{с}^2}}-\text{с}\right)\cdot\text{с}=\dfrac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2}=\text{м}$

Вычисления: $\Delta h=\dfrac{9{,}8}{2}\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot49}{9{,}8}}-1\right)\cdot1=4{,}9$ м.

Ответ: $\Delta h = 4{,}9$ м

2.2.4 Задача 4. Маховик, вращающийся с частотой $2c^{-1}$, останавливается в течение 1,5мин. Считая движение равнозамедленным, определить, сколько оборотов сделает маховик до полной остановки и каково ускорение маховика.

Решение.

Дано	
$n = 2c^{-1}$	Уравнения движения маховика имеют вид:
t=1,5мин=90с	
N -? ε -?	

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t \qquad (2)$$

Принимая во внимание, что $\omega = 0$ и $\omega_0 = 2\pi n$, из уравнения (2) найдем $\varepsilon = -\frac{2\pi\ n}{t}$. Учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, находим число оборотов

$$2\pi N = \frac{2\pi\ nt^2}{2t}; \qquad N = \frac{nt}{2}.$$

Анализ единиц: $[\varepsilon] = \frac{c^{-1}}{c} = \frac{1}{c^2} = \frac{\text{рад}}{c^2}$, $\quad [N] = c^{-1} \cdot c = 1$

Вычисления: $N = 2 \cdot \frac{90}{2} = 90$; $\quad \varepsilon = -\frac{6{,}28 \cdot 2}{90} = -0{,}14$рад/с^2.

Знак минус указывает на то, что маховик вращался замедленно.

Ответ: $\varepsilon = -0{,}14$рад/с^2.

2.2.5 Задача 5. Диск радиусом 0,2м вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A=3рад, B=-1рад/с, C=0,1рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени t=10с.

Решение.

Дано	
A=3рад	Найдем угловую скорость как первую производную от угла поворота по времени: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2$
B=-1рад/с	
C=0,1рад/с^3	и угловое ускорение как первую производную от угловой скорости по времени: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct.$
t=10с	
R=0,2м	
a_τ-? a_n-? a-?	

Линейную скорость υ найдем, пользуясь ее связью с угловой скоростью:

$$\upsilon = \omega \cdot R = R \cdot (B + 3Ct^2).$$

Найдем тангенциальное ускорение $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = R\cdot 6Ct.$

Нормальное ускорение найдем по формуле: $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2\cdot R = (B+3Ct^2)^2\cdot R.$

Полное ускорение точек на окружности: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Анализ единиц: $[a_\tau] = \dfrac{\text{рад}}{c^3}\cdot$м·с=м/с^2; $[a_n]=$ м/с^2.

Вычисления: a_τ=0,2·6·0,1·10=1,2 м/с^2; a_n=0,2·(-1+3·0,1·100)=5,8м/с^2;

$a = \sqrt{1{,}2^2 + 5{,}8^2} = \sqrt{35{,}08}$=5,9 м/с^2.

Ответ: a_τ=1,2 м/с^2; a_n=5,8м/с^2; a =5,9 м/с^2.

3 ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

3.1 Основные законы и формулы

3.1.1 Второй закон Ньютона

$$\vec{F}dt = d(m\vec{\upsilon}) = d\vec{p}\,,$$

где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – импульс тела, $\vec{F}dt$ - импульс силы.

3.1.2 Если масса m постоянна, то

$$F = \frac{md\upsilon}{dt} = ma$$

3.1.3 Сила упругости (k-жесткость пружины; x - абсолютная деформация)

$$F=-kx$$

3.1.4 Сила тяжести

$$\vec{P} = m\vec{g}\,,\ P=mg$$

3.1.5 Сила гравитационного взаимодействия

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

3.1.6 Сила трения

$$F_{тр}=kN\,, \quad \text{где } N \text{ - сила нормального давления}$$

3.1.7 Закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = const$$

3.1.8 Работа переменной силы F на пути S

$$A = \int_S F_S dS = \int_S F\cos\alpha dS$$

3.1.9 Для постоянной силы

$$A=F\cdot S\cdot\cos\alpha$$

3.1.10 Мощность

$$N=\frac{dA}{dt}=F\cdot \upsilon\cdot \cos\alpha$$

3.1.11 Кинетическая энергия движущегося тела

$$E_k=\frac{m\upsilon^2}{2}$$

3.1.12 Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h

$$E=m\cdot g\cdot h$$

3.1.13 Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$E_n=\frac{\kappa\ x^2}{2}$$

3.1.14 Закон сохранения механической энергии

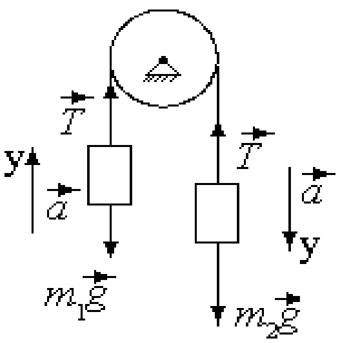
$$E_k+E_n=E=\text{const}$$

3.2 Примеры решения задач

3.2.1 Задача 1. Две гири, имеющие массы m_1=3кг и m_2 =6,8кг, висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Легкая гиря находится на 2м ниже тяжелой. Гири пришли в движение без начальной скорости. Через какое время они окажутся на одной высоте?

Решение.

m_1=3кг
m_2=6,8кг
h=2м
t - ?



Если не учитывать растяжение нити, то можно считать, что в каждый момент времени грузы на ее концах имеют одинаковые по модулю ускорения. Если пренебречь трением на блоке, то можно считать силы натяжения T нити одинаковыми в любом ее сечении.

Запишем для первого груза уравнение второго закона Ньютона в векторной форме: $m_1\vec{g}+\vec{T}=m_1\vec{a}$

Проецируя силы и ускорение на ось y, направленную так же как ускорение груза m_1, получаем: $T-m_1g=m_1a$ (1)

Запишем уравнение второго закона Ньютона в векторной форме для второго груза: $m_2\vec{g}+\vec{T}=m_2\vec{a}$.

Проецируем силы и ускорение на ось y, направление которой совпадает с направлением ускорения второго груза, получаем:

$$m_2g-T=m_2a \qquad (2)$$

(Положительное направление оси каждого груза разное и его удобнее выбирать в направлении ускорения тел).

Сложим почленно уравнения (1) и (2):

$$m_2g-m_1g=(m_1+m_2)a,$$

откуда $$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

В момент времени t обе гири окажутся на одной высоте h_1=h_2=$\frac{h}{2}$

Из формулы h_1=$\frac{at^2}{2}$ найдем: $t = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{(m_2 - m_1)g}}$

Анализ единиц: $[t]$=$\sqrt{\frac{м \cdot кг}{кг \cdot м/с^2}} = \sqrt{с^2} = с$

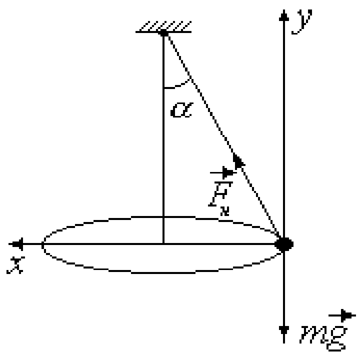
Вычисления: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot (6{,}8 + 3)}{(6{,}8 - 3) \cdot 9{,}8}}$ =0,73 $с$

Ответ: t =0,73 $с$.

3.2.2 Задача 2. Шарик массой 300 г, привязанный нитью к подвесу, описывает в горизонтальной плоскости окружность, имея постоянную скорость. Определить скорость шарика и период его вращения по окружности, если длина нити 1м, а ее угол с вертикалью составляет 30°.

Решение.

m=300г=0,3кг l=1м α=30°	На шарик действуют сила натяжения $F_н$ и сила тяжести mg. Запишем уравнение второго закона Ньютона в векторной форме:
-? T-?	$$\vec{F}_н + m\vec{g} = m\vec{a}$$



Спроецируем уравнение на оси x и y:

$$F_н\sin\ = ma_x \qquad (1)$$

$$-mg + F_н\cos\ = ma_y \qquad (2)$$

Учитывая, что a_x=a_n= $^2/R$, a_y=0, R= $l\cdot$ sin и подставляя выражения для a_x, a_y, R в уравнения (1) и (2), получим

$$F_H \sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{m\upsilon^2}{l \cdot \sin\alpha} \qquad (3)$$

$$F_н\cos\ = mg \qquad (4)$$

Разделив почленно уравнение (3) на уравнение (4),

найдем $$\upsilon = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}\sin\alpha \cdot$$

При равномерном движении шарика его период вращения

$$T=\frac{2\pi R}{\upsilon}=\frac{2\pi\cdot l\cdot\sin\alpha}{\upsilon}$$

Анализ единиц: [υ]=[$\sqrt{\frac{м}{с^2}\cdot м}=\sqrt{\frac{м^2}{с^2}}$]$=\frac{м}{с}$, [T]=[$\frac{м}{м/с}$]= с.

Вычисления: $\upsilon=0{,}5\sqrt{\frac{9{,}8\cdot 1}{0{,}87}}$=1,7 м/с, Т=$\frac{6{,}28\cdot 1\cdot 0{,}5}{1{,}7}$=1,9 с.

Ответ: υ=1,7 м/с, Т=1,9с.

3.2.3 Задача 3. Шар массой 4кг движется со скоростью 5м/с и сталкивается с шаром массой 6кг, который движется ему навстречу со скоростью 2м/с. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным.

Решение.

m_1=4кг
υ_1=5м/с
m_2=6кг
υ_1=2м/с

A-?

Работа, совершаемая при деформации шаров, равна изменению кинетической энергии шаров: $A=\Delta E_k=E_k-E_k'$ (1)

где $E_k=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}$ - суммарная кинетическая энергия шаров до удара, $E_k'=\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}$- кинетическая энергия шаров после удара. Скорость u шаров найдем по закону сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2=(m_1+m_2)\vec{u}$$

Так как шары движутся навстречу друг другу, то $m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)u$,

откуда $$u=\frac{(m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2)}{m_1+m_2}$$

Найдем $$E_k'=\frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{(m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2)^2}{(m_1+m_2)^2}=\frac{(m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

Подставляя выражения для E_k и E_k' в уравнение (1), получим:

$$A=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}-\frac{(m_1\upsilon_1-m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

Анализ единиц: [A]=[$\frac{кг\cdot м^2}{с^2}$=Н·м]=Дж.

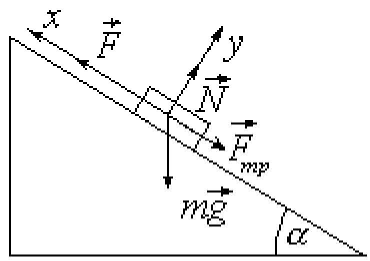
Вычисления: $A=\frac{4\cdot 25}{2}+\frac{6\cdot 4}{2}-\frac{(4\cdot 5-6\cdot 2)^2}{2\cdot(4+6)}$=58,8Дж

Ответ: A=58,8 Дж.

3.2.4 Задача 4. Груз массой 100кг поднимают по наклонной плоскости длиной 3м, угол её наклона к горизонту 30^0, коэффициент трения 0,1, ускорение при подъеме 1м/с^2. У основания наклонной плоскости груз находился в покое. Определить работу подъема груза по наклонной плоскости и среднюю мощность подъемного устройства.

Решение.

m =100кг l=3м k=0.1 a=1м/с^2	На груз, движущейся по наклонной плоскости действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$.
A-? <P>-?	



Запишем для груза уравнение второго закона Ньютона в векторной форме $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$ и проецируя его на оси x и y, получим

$$-mg\cdot\sin\alpha + F - F_{тр} = ma \qquad (1)$$

$$-mg\cdot\cos\alpha + N = 0 \qquad (2)$$

Из уравнения (1) находим $F = ma + mg\cdot\sin\alpha + F_{тр}$.

Из уравнения (2) находим $N = mg\cdot\cos\alpha$.

Т.к. $F_{тр}=k\cdot N= k\cdot mg\cdot\cos\alpha$, то $F= ma +mg\cdot\sin\alpha + k\cdot mg\cdot\cos\alpha$,

или $F= m\cdot(a +g\sin\alpha + kg\cos\alpha)$

Найдем работу по подъему груза $A=F\cdot l=m\cdot l\cdot(a +g\cdot\sin\alpha + k\cdot g\cdot\cos\alpha)$

Средняя мощность подъемного устройства $\langle P\rangle=\frac{A}{t}$

Время t подъема груза найдем из уравнения равноускоренного движения

$$l=\frac{at^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad t=\sqrt{\frac{2l}{a}} \quad \text{и} \quad \langle P\rangle = \frac{A}{\sqrt{\frac{2l}{a}}} = A\sqrt{\frac{a}{2l}}$$

Анализ единиц: $[A]$=[Н·м]=Дж, $[P]=[Дж\cdot\sqrt{\frac{м/с^2}{м}}=\frac{Дж}{с}]$=Вт

Вычисления: A=100·3(1+9,8·0,5+0,1·9,8·0,87)≈2026 Дж.

$\langle P\rangle=2026\cdot\sqrt{\frac{1}{2\cdot 3}}$=827 Вт.

Ответ: A=2026Дж, <P>=827 Вт.

4 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1 Основные формулы и законы

4.1.1 Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2$$

4.1.2 Момент инерции тела относительно его оси вращения

$$J = \int_V \rho r^2 dV$$

4.1.3 Теорема Штейнера

$$J = J_0 + ma^2$$

4.1.4 Таблица моментов инерции

ТЕЛО	ОСЬ ВРАЩЕНИЯ ПРОХОДИТ	МОМЕНТ ИНЕРЦИИ
Однородный тонкий стержень длиной l	Через центр тяжести перпендикулярно длине	$ml^2/12$
Сплошной цилиндр	Через ось цилиндра	$mR^2/2$
Полый цилиндр	Через ось цилиндра	$m(R^2_1+R^2_2)/2$
Полый тонкий цилиндр	Через ось цилиндра	mR^2
Однородный шар	По диаметру	$2mR^2/5$

4.1.5 Момент силы относительно оси вращения

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}], \quad M = rF\sin\alpha = F \cdot l$$

4.1.6 Основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$$

4.1.7 Если $J=const$, то

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon}$$

4.1.8 Момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$$

4.1.9 Закон сохранения момента импульса в замкнутой системе

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} J_i \vec{\omega}_i = const$$

4.1.10 Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

4.2 Примеры решения задач

4.2.1 Задача 1. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где B=0,2 рад/с^3. Определить вращающий момент, действующий на стержень через 2с после начала вращения, если момент инерции стержня 0,048 кг·м^2.

Решение.

Дано	
B=0,2рад/с^3 t=2с J=0,048кг·м^2	Согласно основному уравнению динамики вращательного движения $M = J\cdot\varepsilon$ (1) Найдем угловую скорость вращения как первую производную от угла поворота по времени $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = A + 3Bt^2$
M - ?	

Угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 6Bt$ (2)

Подставив (2) в (1), получим $M = 6\cdot JBt$

Анализ единиц: $[M]$= кг·м^2·(рад/с^3)·с=Н·м.

Вычисления: M=0,048·6·0,2·2=0,115 Н·м.

Ответ: M=0,115 Н·м.

4.2.2 Задача 2. По горизонтальной плоской поверхности катится диск со скоростью 8м/с. Определить коэффициент трения, если диск, предоставленный самому себе, остановился, пройдя 18м.

Решение.

Дано	
υ=8м/с S=18м	Согласно закону сохранения энергии работа по преодолению трения совершается за счет кинетической энергии поступательного и вращательного движения диска $F_{\text{тр}}\cdot S = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}$
k-?	

Учтя, что $F_{\text{тр}} = kmg$, $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$, $J = \dfrac{mR^2}{2}$,

получим $$kmg\cdot S = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{\upsilon^2}{R^2} = \frac{3}{4}m\upsilon^2,$$

откуда $$k = \frac{3\upsilon^2}{4gS}$$

Анализ единиц: $[k]=\left[\dfrac{\frac{м^2}{с^2}}{\frac{м}{с^2}\cdot м}\right]=1.$ Вычисления: $k = \dfrac{3\cdot 64}{4\cdot 9{,}8\cdot 18}$=0,27.

Ответ: k= 0,27

4.2.3 Задача 3. На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой n_1=8мин$^{-1}$, стоит человек массой 70кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой n_2=10мин$^{-1}$. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Решение.

n_1=8мин$^{-1}$ m_1=70кг n_2=10мин$^{-1}$	Согласно закону сохранения момента импульса: $L_1=L_2$ где $L_1=J_1\omega_1=J_1 2\pi\cdot n_1$ - момент импульса системы, когда человек стоит на краю платформы;
m_2-?	$L_2=J_2\omega_2=J_2 2\pi\cdot n_2$ - момент импульса системы, когда человек стоит в центре платформы.

Учтя, что $J_1=J_0+m_1R^2=\dfrac{m_2R^2}{2}+m_1R^2$, $J_2=J_0=\dfrac{m_2R^2}{2}$

(где $J_0=\dfrac{m_2R^2}{2}$ - момент инерции платформы), т.к. $J_1 2\pi\cdot n_1= J_2 2\pi\cdot n_2$

получим $\dfrac{R^2(2m_1+m_2)2\pi\cdot n_1}{2}=\dfrac{m_2R^2\cdot 2\pi\cdot n_2}{2}$, или $2m_1\cdot n_1+m_2\cdot n_1= m_2\cdot n_2$,

откуда $m_2=\dfrac{2m_1\cdot n_1}{n_2-n_1}$

Анализ единиц: $[m]=\dfrac{\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}}{\text{с}^{-1}}$=кг. Вычисления: $m_2=\dfrac{2\cdot 70\cdot 8}{2}$=560кг.

Ответ: m_2=560кг

4.2.4 Задача 4. Блок, имеющий форму диска массой 0,4кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами 0,3кг и 0,7кг. Определить силы натяжения нити на обе стороны блока.

Решение.

m=0,4кг m_1=0,3кг m_2=0,7кг	На первый груз действуют: сила тяжести m_1g и сила натяжения нити T_1. Запишем уравнение движения в векторной форме $m_1\vec{g}+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$ и спроецируем на ось y, направленную вверх,
T_1-? T_2-?	как и ускорение a: $T_1-m_1g=m_1a$ (1)

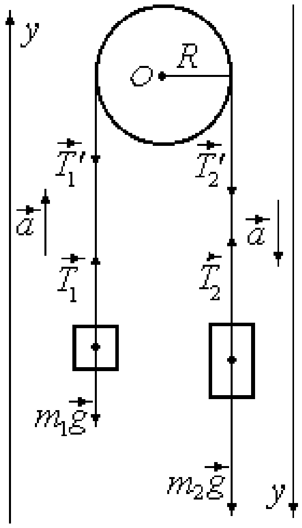
Уравнение движения второго груза:

$$m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\vec{a} \quad \text{или} \quad m_2g - T_2 = m_2a \qquad (2)$$

Под действием двух моментов сил $T_1'R$ и $T_2'R$ относительно горизонтальной оси О блок приобретет угловое ускорение ε. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения $T_2'R - T_1'R = J\varepsilon$

$$\text{или } R\,(T_2'-T_1')=J\varepsilon \qquad (3)$$

где $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$; $J= \dfrac{mR^2}{2}$



По третьему закону Ньютона $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$, $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$, поэтому $T_2'-T_1'=T_2-T_1$.

Сложим уравнения (1) и (2) и получим

$$T_2 - T_1 = (m_2-m_1)g - (m_2+m_1)a \qquad (4)$$

Подставим выражение (4) в уравнение (3): $R\,[(m_2-m_1)g - (m_2+m_1)a]= \dfrac{mR^2}{2}\dfrac{a}{R}$,

найдем $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{(m_2 + m_1 + \frac{m}{2})}$; $T_1=m_1\,(g+a)$; $T_2= m_2\,(g-a)$

Анализ единиц: $[\,a\,]=\left[\dfrac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{кг}}\right]= \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $[T\,]= \left[\text{кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$=Н

Вычисления: $a = \dfrac{(0{,}7 - 0{,}3)\cdot 9{,}8}{(0{,}3 + 0{,}7 + 0{,}4/2)}$=3,26 м/с^2.

T_1=0,3·(9,8+3,26)=3,92 Н; T_2=0,7·(9,8-3,26)=4,58 Н

Ответ: a =3,26 м/с^2; T_1=3,92 Н; T_2=4,58 Н.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А1 Основные физические постоянные

Физические постоянные	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8,31Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3\cdot10^{8}$ м/с
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная Вина	b	$2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К
	c	$1{,}29\cdot10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5)
Постоянная Планка	h	$6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar$	$1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	R	$3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$
	R'	$1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Боровский радиус	a_0	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	λ_c	$2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	1 а.е.м.	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ кг (0,00055 а.е.м.)
Масса покоя протона	m_p	$1{,}672\cdot10^{-27}$ кг (1,00728 а.е.м.)
Масса покоя нейтрона	m_n	$1{,}675\cdot10^{-27}$ кг (1,00867 а.е.м.)
Масса покоя α-частиц	m_α	$6{,}64\cdot10^{-27}$ кг (4,00149 а.е.м.)

Таблица А2 Соотношение между внесистемными единицами и единицами СИ

1 л $=10^{-3}$ м^3 1 эВ$=1,6\cdot10^{-19}$ Дж 1 мм.рт.ст.=133 Па

1 атм$=1,01\cdot10^5$ Па 1 Å$=10^{-10}$ м

Таблица А3 Молярная масса, эффективный диаметр молекул некоторых газов

Газ	$\mu\cdot10^{-3}$, кг/моль	$d\cdot10^{-10}$, м	Газ	$\mu\cdot10^{-3}$, кг/моль	$d\cdot10^{-10}$,м
Водород	2	2,3	Аргон	40	3,5
Гелий	4	1,9	Воздух	29	2,7
Азот	28	3,0	Углекислый газ	44	
Кислород	32	2,7	Пары воды	18	3,0
Неон	20				

Таблица А4 Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость ε	Вещество	Проницаемость ε
Вода	81	Слюда	7
Парафин	2	Кварц	4,5
Стекло	7	Воск	3

Таблица А5 Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Медь	$1,7\cdot10^{-8}$	Алюминий	$2,53\cdot10^{-8}$
Железо	$9,8\cdot10^{-8}$	Серебро	$1,6\cdot10^{-8}$
Нихром	$1,1\cdot10^{-6}$	Свинец	$2,2\cdot10^{-8}$

Таблица А6 Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,44

Вода	1,33	Стекло	1,50

Таблица А7 Работа выхода электронов

Металл	$A \cdot 10^{-19}$ Дж	A, эВ	Металл	$A \cdot 10^{-19}$ Дж	A, эВ
Вольфрам	7,2	4,5	Рубидий	3,4	2,1
Калий	3,5	2,2	Серебро	4,7	7,5
Литий	3,7	2,3	Цезий	3,2	2,0
Натрий	4,0	2,5	Цинк	6,4	4,0
Платина	10,1	6,3			

Таблица А8 Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименование

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
Гига	Г	10^{9}	деци	д	10^{-1}
Мега	М	10^{6}	санти	с	10^{-2}
Кило	к	10^{3}	милли	м	10^{-3}
			микро	мк	10^{-6}
			нано	н	10^{-9}
			пико	п	10^{-12}